

Naglasci za izborni kolegij: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu - nastavak

Fourierov razvoj

Već smo vidjeli da (dovoljno razumna) funkcija f perioda 2π ima Fourierov razvoj:

$$f(x) = a_0 + [a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)] + [a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x)] + [a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)] + \dots$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$

Za **parne** funkcije f formule se mogu pojednostavniti tako da se za a_n ne integrira od $-\pi$ do π , već od 0 do π i pomnoži s 2, a za b_n se dobije 0. Dakle, dobije se:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$b_n = 0$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$

To je logično, naime da u Fourierovu razvoju parne funkcije sudjeluju samo parne funkcije (kosinusi).

Slično, u Fourierovu razvoju neparne funkcije f sudjeluju samo sinusi:

$$a_n = 0$$

za $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$

Te formule vrijede za funkciju f perioda 2π . Tu smo taj period gledali na intervalu $[-\pi, \pi]$. Analogne formule vrijede za funkciju f perioda T , samo što tu T možemo gledati na intervalu $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, a umjesto $\cos x$ pisati $\cos \frac{2\pi}{T}x$ itd. Naime, ako je $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$, onda je $-\pi \leq \frac{2\pi}{T}x \leq \pi$, i analogno za ostale funkcije. Zato imamo:

(Dovoljno razumna) funkcija f perioda T ima Fourierov razvoj:

$$f(x) = a_0 + [a_1 \cos(\frac{2\pi}{T}x) + b_1 \sin(\frac{2\pi}{T}x)] + [a_2 \cos(2\frac{2\pi}{T}x) + b_2 \sin(2\frac{2\pi}{T}x)] \\ + [a_3 \cos(3\frac{2\pi}{T}x) + b_3 \sin(3\frac{2\pi}{T}x)] + \dots$$

gdje je

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(n\frac{2\pi}{T}x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(n\frac{2\pi}{T}x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$

Uočite vezu medju koeficijentima ispred integrala u posebnom slučaju i općenito.

Na primjer, taj je koeficijent za b_n jednak:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{2}{T}.$$

Kao i prije, za **parne** funkcije f formule se mogu pojednostavniti tako da se za a_n ne integrira od $-\frac{T}{2}$ do $\frac{T}{2}$, već od 0 do $\frac{T}{2}$ i pomnoži s 2, a za b_n se dobije 0. Dakle, dobije se:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(n\frac{2\pi}{T}x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

$$b_n = 0$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$

To je logično, naime da u Fourierovu razvoju parne funkcije sudjeluju samo

parne funkcije - kosinusi (**kosinusni Fourierov razvoj**).

Slično, u Fourierovu razvoju neparne funkcije f sudjeluju samo sinusi (**sinusni Fourierov razvoj**):

$$a_n = 0$$

za $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(n \frac{2\pi}{T} x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$

Sad ćemo dio navedenog ilustrirati na primjeru funkcije (koja se pojavljuje kod opisa titranja učvršćene elastične žice).

Primjer 1. Odredimo Fourierov razvoj funkcije zadane uvjetima:

$$f(x) := \frac{2A}{L}x, \text{ za } 0 \leq x \leq \frac{L}{2},$$

$$f(x) := \frac{2A}{L}(L - x), \text{ za } \frac{L}{2} \leq x \leq L,$$

koju smo, po neparnosti proširili za sve realne x (slika 7).

Smisao tog grafa jest u tomu da se elastična žica duljine L (koja je učvršćena u rubovima) napne po sredini do visine A , potom pusti da titra. Vidjet ćemo da je za rješenje problema opisa tog titranja važno poznavanje razvoja funkcije f u sinusni Fourierov red.

Tu je f neparna, perioda $T = 2L$. Zato je

$$b_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2A}{L}x \cdot \sin(n \frac{\pi}{L}x) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2A}{L}(L - x) \cdot \sin(n \frac{\pi}{L}x) dx \right] = \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

(to smo mogli dobiti parcijalnom integracijom, a još bolje izravnom uporabom programskog paketa Mathematica). Lako se vidi da je:

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ za } n = 1, 5, 9, 13, \dots$$

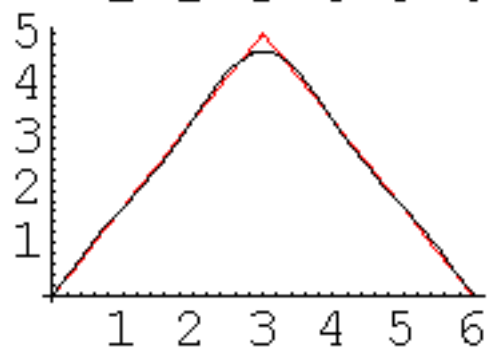
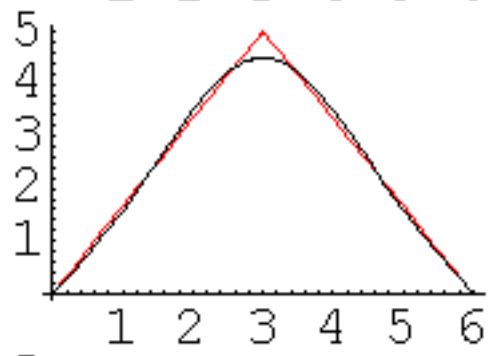
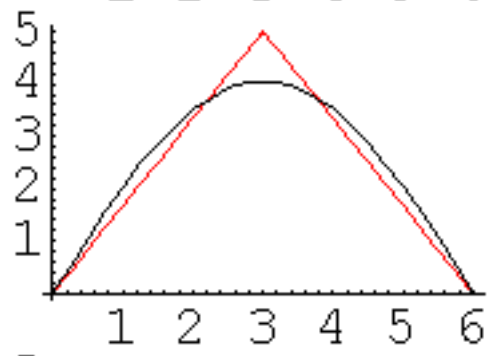
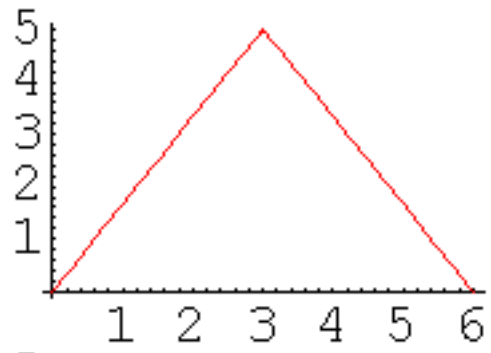
$$\sin \frac{n\pi}{2} = -1 \text{ za } n = 3, 7, 11, 15, \dots$$

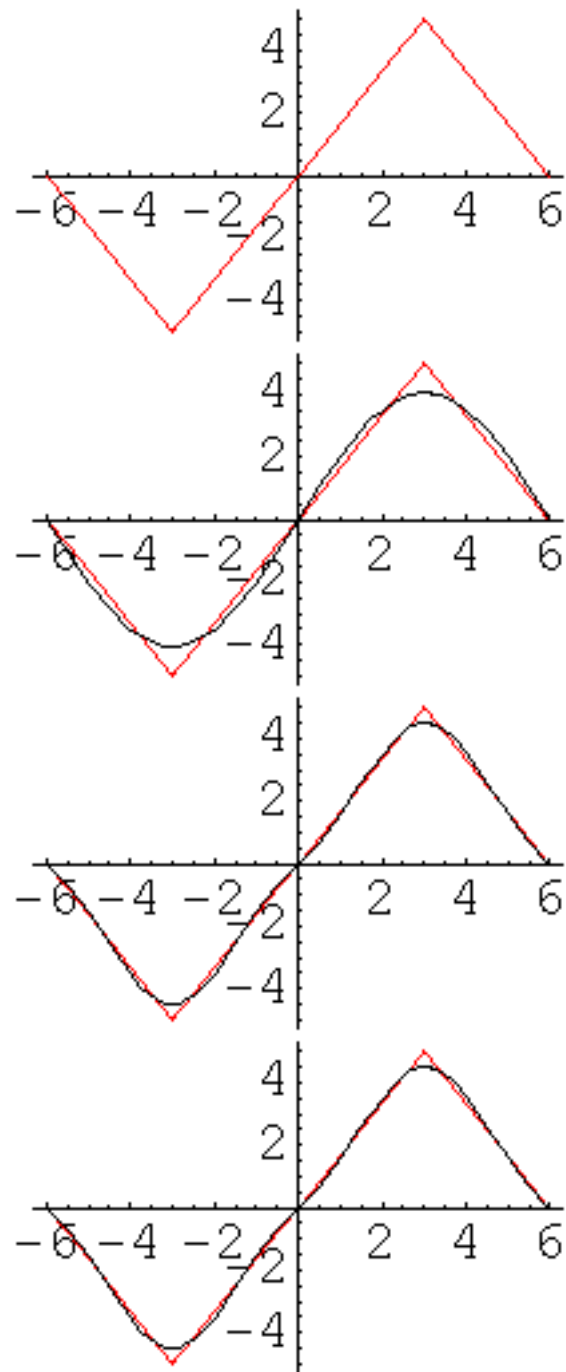
$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0 \text{ za } n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

Zato je traženi razvoj:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}A \left(\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{L} - \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi x}{L} + \dots \right)$$

Rezultat predočujemo pomoću programskog paketa Mathematica za $A = 5$ i $L = 6$.





Idealno titranje čestice po pravcu

Intuitivno dolazimo do toga da takvo titranje po y -osi oko ishodišta uvjetuje promjenjiva sila koja ima sljedeća svojstva:

1. U svakoj točki y -osi (u kojoj se odvija titranje) sila je usmjerena prema ishodištu.

2. Zbog simetrije funkcija koja opisuje silu u ovisnosti o y je neparna (posebice, sila u ishodištu jednaka je nuli).

Najjednostavnija takva sila je oblika

$$F(y) := -ky$$

gdje je $k > 0$ konstanta.

Neka je $y(t)$ položaj čestice u vrijeme t .

Prema Newtonovu zakonu $a(t) = -\frac{k}{m}y(t)$, gdje je m masa čestice, dakle

$$y''(t) = -\omega^2 y(t)$$

gdje je $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$. To je **diferencijalna jednadžba titranja**. Intuitivno je jasno da će, uz stalnu masu m , veći ω značiti brže titranje.

Da bi titranje bilo jednoznačno određeno (i da bismo ga mogli opisati) potrebni su **početni uvjeti**. Fizikalno najjasniji takvi uvjeti jesu **početni položaj** i **početna brzina**. Odavde postavljamo diferencijalnu jednadžbu titranja skupa s početnim uvjetima - **Cauchy-ev problem** (tradicionalno, varijablu t izostavljamo):

$$y'' + \omega^2 y = 0; \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0 \quad (*)$$

Tu je početni položaj A , a radi jednostavnosti smo se odlučili da početna brzina bude 0 (općenito bi bilo $y'(0) = v_0$, međutim to bitno ne mijenja rješenje).

Fizikalno opravdanje. Pokusom se pokazuje (Newtonov zakon, ali ne onaj od gore), da za silu F koja djeluje na vrh vrlo elastične opruge kao na slici, približno vrijedi $F(y) = -ky$, gdje je k koeficijent elastičnosti, i da su početni uvjeti kao u (*).

Intuitivno određivanje jednadžbe gibanja.

Prihvatljivo je sljedeće umovanje:

(i) Od točke A prema ishodištu čestica ubrzava (jer sila djeluje u smjeru gibanja).

(ii) Od ishodišta prema $-A$ čestica usporava (jer sila djeluje suprotno od

smjera gibanja). Pri tom je tempo usporavanja, zbog simetrije, u skladu s tempom ubrzavanja.

(iii) U $-A$ čestica zastane, potom se vraća prema A potpuno analogno i dalje periodno.

Vidimo da je najjednostavnija (od poznatih periodnih funkcija koja ima takav graf, a u kojoj sudjeluju parametri A i ω), zadana vezom:

$$y = A \cos(\omega t)$$

Zaista, dobijemo $y' = -A\omega \sin(\omega t)$ i $y'' = -A\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 y$, pa vidimo da to rješenje zadovoljava (*).

Matematičko rješavanje problema (*).

Tu je karakteristična jednačba diferencijalne jednačbe iz (*)

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

s rješenjima $r = \pm\omega \cdot i$, pa je opće rješenje

$$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Iz početnih uvjeta sad se lako vidi da je $C_1 = A$ i $C_2 = 0$.

Idealno titranje učvršćene žice.

Neka je savršeno elastična žica položena po x -osi od 0 do L , učvršćena u krajevima. Neka je dalje:

t -vrijeme

x -duljinska koordinata

$u(x, t)$ položaj (vertikalni otklon) čestice s prvom koordinatom x u vremenu t .

Tu se pokaže da je (parcijalna) diferencijalna jednačina titranja (u idealnim uvjetima):

Jednodimenzionalna valna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (**)$$

gdje je c koeficijent elastičnosti.

Rubni uvjeti: $u(0, t) = u(L, t) = 0$ za sve t (jer je žica učvršćena).

Početni uvjeti:

početni položaj: $u(x, 0) = f(x)$, **početna brzina:** $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Tu smo, radi jednostavnosti, stavili da je početna brzina 0, čime smo aludirali na predožbu da smo žicu nategli u položaj opisan funkcijom f , potom pustili da titra, bez ikakva dodatna impulsa; općenito bi bilo $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$.

Intuitivno osjećamo da će titranje biti opisano sinusima i kosinusima, međutim teško je unaprijed predvidjeti oblik.

Strategija rješavanja.

1. korak. Nalaženje puno (beskonačno mnogo) rješenja od (***) koji zadovoljavaju rubne uvjete, ali ne nužno početne.

2. korak. Traženje rješenja koje će zadovoljavati i rubne i početne uvjete u obliku linearne kombinacije rješenja iz 1. koraka (tu se nadamo da ćemo uspjeti jer nam u linearnoj kombinaciji sudjeluje beskonačno mnogo neodređenih koeficijenata koje ćemo specificirati tako da ukupna suma zadovoljava i početne uvjete).

1. korak provodimo **metodom separacije varijabli**, tako da rješenje tražimo u obliku:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Sad (***) postaje (uz dogovor da točkice znače derivacije po t , a crtice po x)

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

odnosno

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

gdje je k konstanta (naime lijeva strana ovisi samo t , a desna samo o x). Sad umjesto parcijalne diferencijalne jednadžbe dobijemo sustav običnih diferencijalnih jednadžba

$$F'' - kF = 0, \quad \ddot{G} - c^2 kG = 0$$

Napomena Za nastavak je važno da je konstanta k negativna. Naime, ako bi bilo $k > 0$, onda bi opé rješenje od $F'' - kF = 0$ bilo $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$, uz konstante C_1, C_2 . Kako želimo da rješenja zadovoljavaju rubne uvjete, dobili bismo:

$$0 = u(0, t) = F(0)G(t) = (C_1 + C_2)G(t)$$

za sve t , odakle slijedi $C_1 + C_2 = 0$, tj. $C_2 = -C_1$ (jer G nije identički nula). Slično,

$$0 = u(L, t) = F(L)G(t) = (C_1 e^{\sqrt{k}L} - C_1 e^{-\sqrt{k}L})G(t) = C_1 (e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L})G(t)$$

za sve t , odakle slijedi $C_1 = 0$ (jer je $e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L} \neq 0$, a G nije identički nula). Sad bi bilo i $C_2 = 0$, pa bi F bio nula funkcija, dakle i u bi bio nula funkcija, što nam ne odgovara.

Malo drukčije, ali slično odbacili bismo i mogućnost $k = 0$.

Od sad, na dalje stavljamo $k := -p^2$ za neki pozitivan realan broj p , pa sustav postaje:

$$F'' + p^2 F = 0, \quad \ddot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

Rješenje jednadžbe $F'' + p^2 F = 0$.

Opće rješenje: $F(x) = C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)$ uz konstante C_1, C_2 . To uvrštavamo u rubne uvjete:

$$0 = u(0, t) = F(0)G(t) = (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)G(t) = C_1 G(t)$$

za sve t , odakle dobijemo $C_1 = 0$.

$$0 = u(L, t) = F(L)G(t) = (0 \cdot \cos(pL) + C_2 \sin(pL))G(t) = C_2 \sin(pL)G(t)$$

za sve t , odakle, zbog $C_2 \neq 0$, dobijemo $\sin(pL) = 0$, što daje mogućnosti.

$$pL = n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{tj. } p = \frac{n\pi}{L}$$

Tako dobijemo niz rješenja

$$F_n(x) := \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (***)$$

Tu smo stavili $C_2 = 1$, a negativne n odbacujemo jer s njima ne dobivamo bitno nova rješenja, a za $n = 0$ dobijemo nula funkciju.

Rješenje jednadžbe $F'' + p^2 F = 0$.

Uzimajući u obzir $p = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ i stavljajući $\lambda_n := \frac{n\pi}{L}c$, dobijemo rješenja $G_n(t) = B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)$, odakle proizlazi (beskonačan) niz rješenja od (***) koja zadovoljavaju i rubne uvjete:

$$u_n(x, t) := F_n(x)G_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. korak.

Rješenje od (***) koje zadovoljava i rubne i početne uvjete tražimo u obliku $u(x, t) := u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$ tj. u obliku

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t))$$

Ako uvrstimo početni uvjet $u(x, 0) = f(x)$, dobijemo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

pa zaključujemo da su B_n **Fourierovi koeficijenti** pri razvoju funkcije f u sinusni red s poluperiodom L . Zato mora biti:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Koeficijente B_n^* općenito dobijemo iz početne brzine. Mi ćemo to uraditi ako je početna brzina jednaka nuli, tj. ako je: $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$. Deriviranjem dobijemo $0 = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(-\lambda_n B_n^*)$ odakle dobijemo $B_n^* = 0$ za sve n . Zato je konačno rješenje

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) B_n \cos(\lambda_n t) \quad (***)$$

Primjer 2. Odredimo gibanje žice kojoj je početni položaj kao u Primjeru 1., tj. ako je $f(x) := \frac{2A}{L}x$, za $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$,
 $f(x) := \frac{2A}{L}(L - x)$, za $\frac{L}{2} \leq x \leq L$,

Tamo je traženi razvoj bio:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} A \left(\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{L} - \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi x}{L} + \dots \right)$$

Iz njega izravno očitavamo koeficijente B_n , pa je

$$u(x) = \frac{8}{\pi^2} A \left(\sin \frac{\pi x}{L} \cos\left(\frac{\pi c}{L}t\right) - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos\left(\frac{3\pi c}{L}t\right) + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{L} \cos\left(\frac{5\pi c}{L}t\right) - \dots \right)$$

Rezultati su grafički predočeni pomoću programskog paketa Mathematica.

